



전자장 수치해석 기본개념

2023-08-23

조용희 @ 목원대학교

✉ yhcho@mokwon.ac.kr

전자장 수치해석 기본개념

KIEES 한국전자파학회

I. 전자장 이론

II. 미분 방정식

III. 적분 방정식



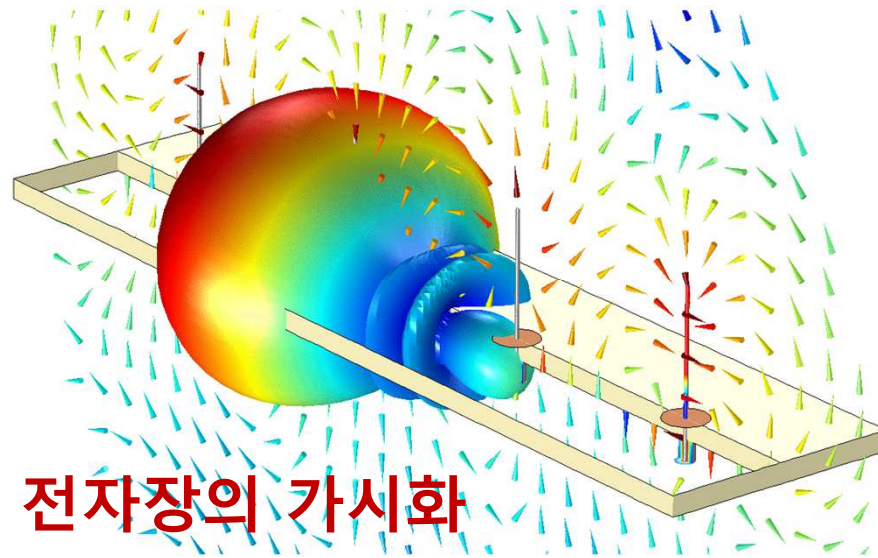
전자장 수치 해석

- 수학적 이해와
- 물리적 직관을 이용해서
- 전자장 현상을 컴퓨터로 수치 계산



$f(x)$

1ucasvb.tumblr.com



전자장의 가시화

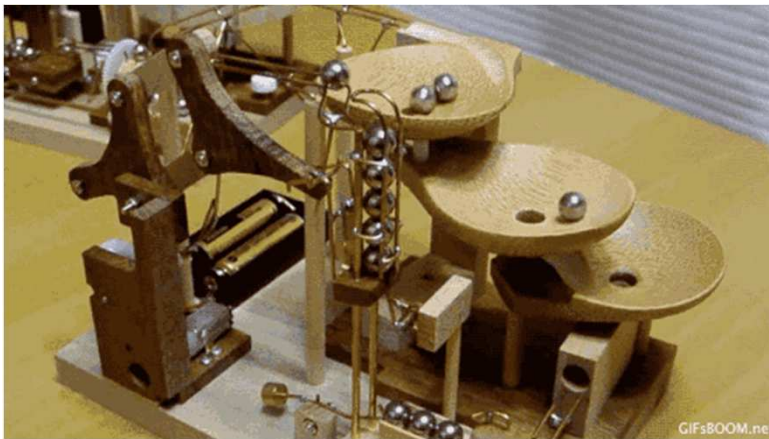
전자장 수치 해석의 균형점

- 수학, 물리학, 컴퓨터의 융합 기술
 - 균형점을 잘못 잡으면 쉽게 포기



전자장 이해의 어려움

- 빛을 제외한 전자장은 **눈으로 관찰할 수 없어서** 우리 직관의 도움을 받기 어려움
- 어떻게 극복?
 - 수학의 중요성
 - 수치 해석



수학의 딜레마

- 수학의 필요성(한계 평가)
 - 전자장의 **정량화**와 **개념화**에 필수
- 수학의 오해(과대 평가)
 - 하지만 전자장 이론은 **수학**이 아니고 **물리학**



Maxwell 방정식 이해 수단

- 말하기(말로 설명하기)
- 시각화(눈으로 이해하기)

Maxwell 방정식의 이해 (I)

- 통상적인 Maxwell-Heaviside 방정식(1864 → 1884)
 - 좌표계 **vector**를 도입해 방정식 4개로 간략화
 - 과감하게 potential을 생략해서 E, H로만 표현

☑ $\vec{r} = (x, y, z)$

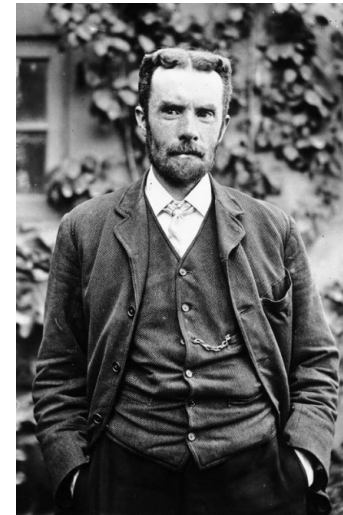
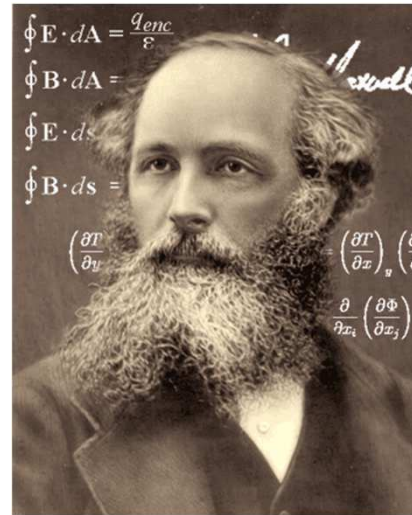
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

누구나 이해



Maxwell 방정식의 이해 (II)

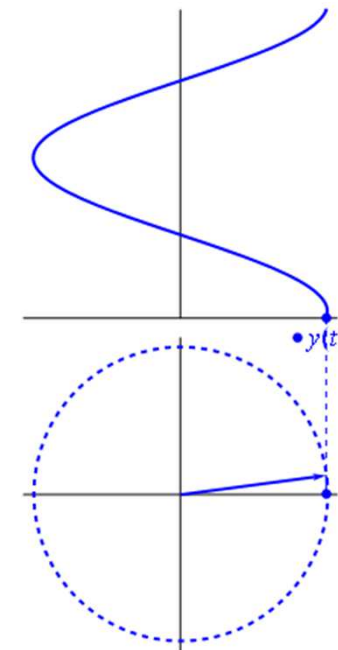
- **Phasor** 기반 주파수 영역 Maxwell 방정식(1893)
 - 시간 미분을 복소수로 대체하는 phasor
 - 공간의 변화만 고려한 편미분 방정식

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = i\omega \bar{B} - \bar{M} - \sigma_m \bar{H}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = -i\omega \bar{D} + \bar{J} + \sigma_e \bar{E}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho_e \quad \text{위상의 중요성}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = \rho_m$$

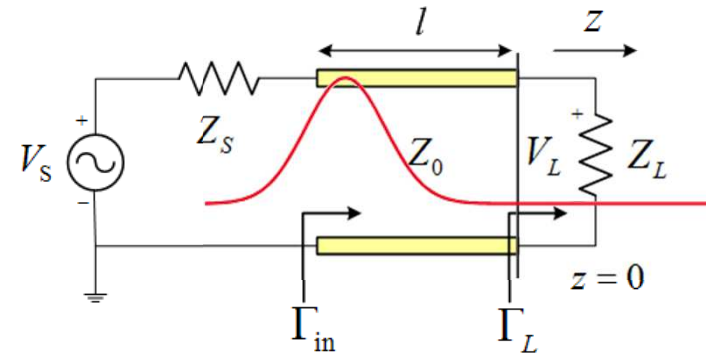


Maxwell 방정식의 이해 (III)

- 가장 단순한 **전송선 방정식(1885)**
 - Vector 요소를 제거하고 1차원 가정
 - E, H보다 친숙한 V, I 사용
 - 기본적으로 **TEM mode** 가정

$$\frac{dV(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{V(z + \Delta z) - V(z)}{\Delta z} = -(R + j\omega L)I(z)$$
$$\frac{dI(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{I(z + \Delta z) - I(z)}{\Delta z} = -(G + j\omega C)V(z)$$

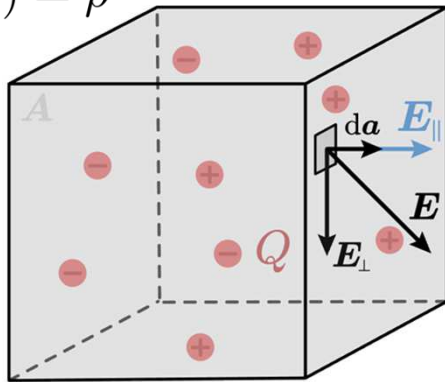
회로에 적합



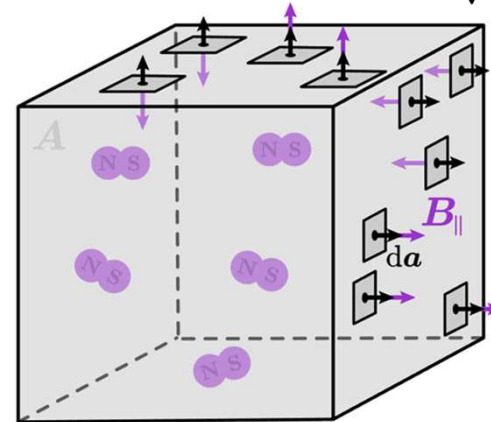
미분 연산자의 이해

■ 발산과 회전 연산자를 말하기 및 시각화

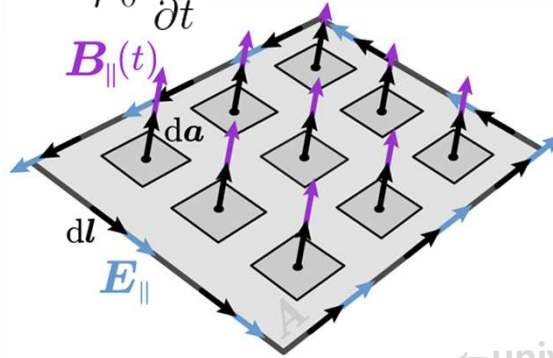
$$\bar{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \bar{E}) = \rho$$



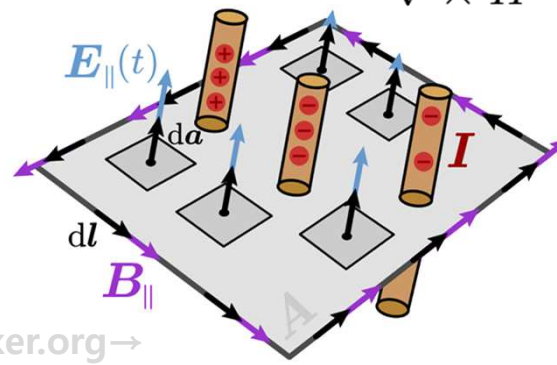
$$\bar{\nabla} \cdot (\mu_0 \bar{H}) = 0$$



$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$



$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$



회전 연산자의 이해

- 전자파 진행(무선 통신)을 이해하기 위한 필수 개념
- 중심을 기준으로 서로 다른 힘이 작용해야 회전 발생: 회전 방향은 오른손 법칙
 - 같은 힘이 작용하면 회전하지 않음



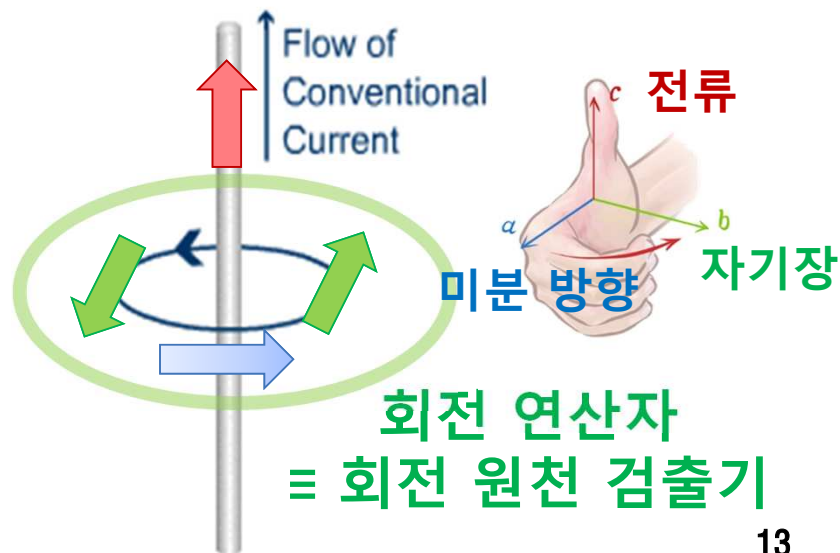
회전(Curl)의 중요성

- E와 H가 결합되는 현상은 본질적으로 회전
- Maxwell 방정식의 핵심인 회전 연산자는 Maxwell이 방정식을 완성하기 4년전(1861)에 Hankel이 증명함
 - 수학자 Green이 던진 적분이 Stokes 정리로 진화
 - 회전 이해가 수학적, 물리적으로 어려움
 - 하지만 전자파 이해에는 필수!

$$\boxed{\checkmark} \quad \oint_C (A_x dx + A_y dy) = \iint_D \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$
$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad \bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

회전 연산자는 회전 검출기

- Vector 외적으로 작용하는 장(field) 특성을 vector 미적분학으로 설명
 - 자기장(H)은 회전 원천($\nabla \times$)을 가짐
 - 회전 원천(vector량)은 바로 전류(I) 혹은 전류 밀도(J)

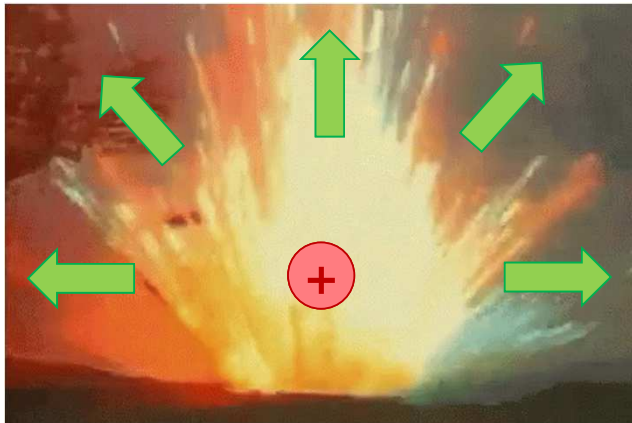


✓ $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

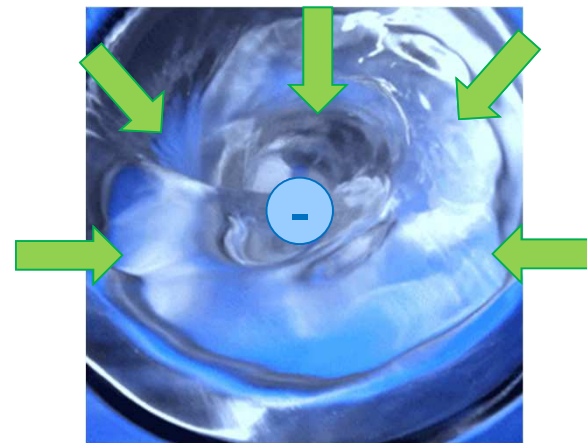
자기장의 회전 원천을 찾으면
전류 밀도가 나온다.

발산 연산자의 이해

- 회전 연산자_(접선 방향)에 **부수적인** 법선 방향 특성을 설명
- 공간을 뚫고 나가는 법선 vector인 **발산 원천**_(scalar량)을 검출



양의 발산 원천



음의 발산 원천

말로 설명하는 Maxwell 방정식

- 원격 탐사의 기본 원리
- 회전 연산자 → 회전 검출기
- 발산 연산자 → 발산(원천) 검출기
- 시간 변화 → (+) = 장 증가, (-) = 장 감소

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

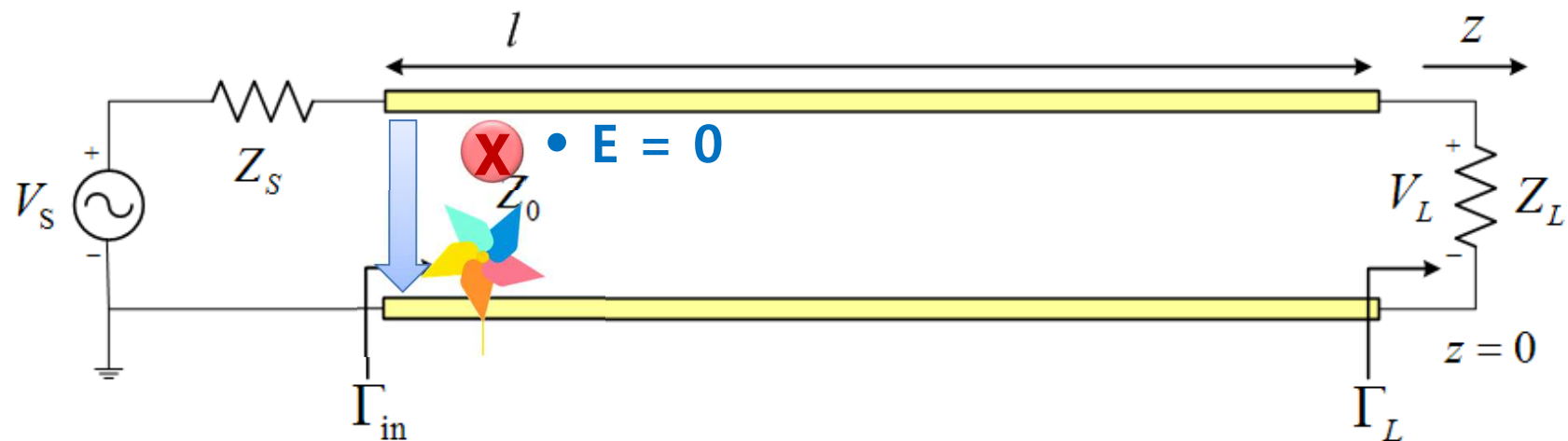
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

E와 H로 표현한 전송선 파동 (I)

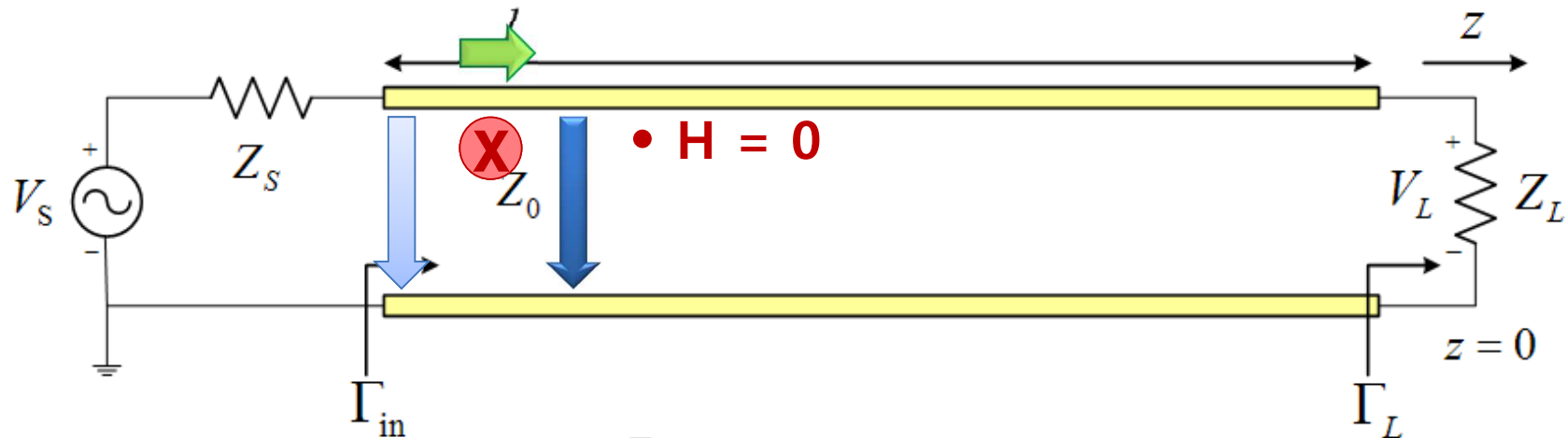
- 입력 전압원 (V_s) 이 인가된 직후
 - 전압원이 전기장 (E) 생성
 - 전기장 회전으로 자기장 (H) 시간 변화 발생



$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad \text{E 회전과 반대 방향으로 H 발생}$$

E와 H로 표현한 전송선 파동 (II)

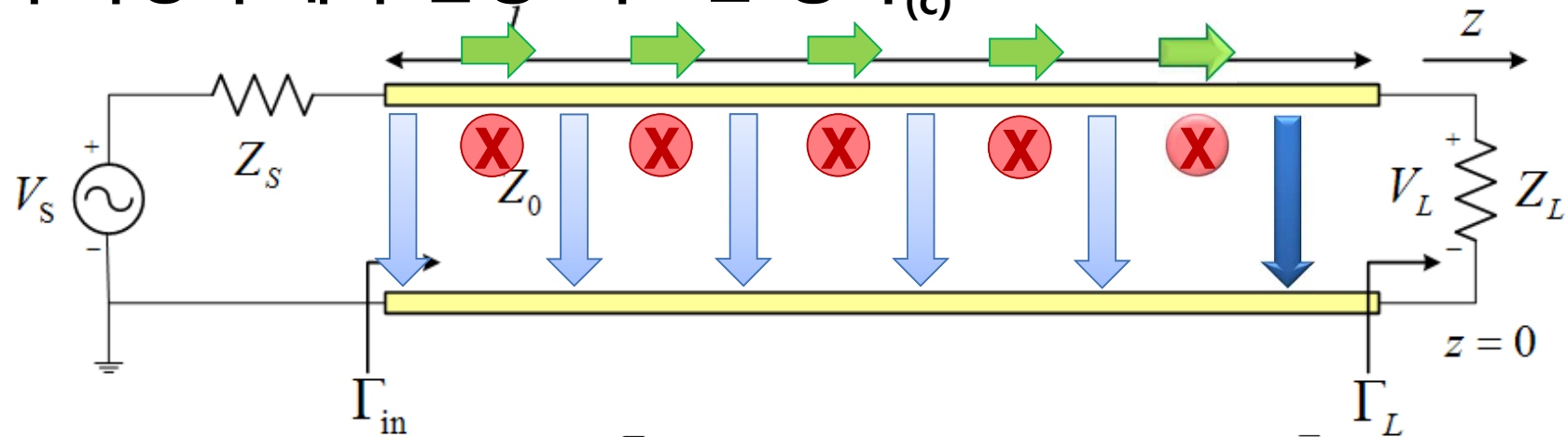
- 새로운 자기장_(H)이 생성된 후
 - 자기장_(H)이 전류_(I)를 전송선로에 유기
 - 자기장 회전으로 전기장_(E) 시간 변화 발생



$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad \text{H 회전과 같은 방향으로 E 발생}$$

E와 H로 표현한 전송선 파동 (III)

- 새로운 전기장_(E)이 생성된 후
 - 전기장 회전으로 자기장_(H) 시간 변화 발생
 - 자기장 회전으로 전기장_(E) 시간 변화 발생
 - 이 과정이 계속 진행: 속도는 광속_(c)

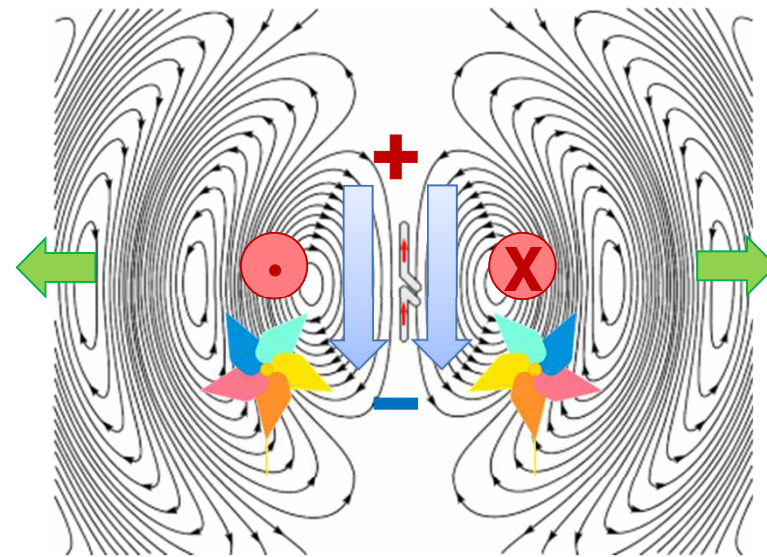


$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

E와 H로 표현한 Antenna 파동

- 전압원_(V)이 antenna 입력에 인가된 직후
 - 전기장 회전으로 자기장_(H) 시간 변화 발생
 - 자기장 회전으로 전기장_(E) 시간 변화 발생



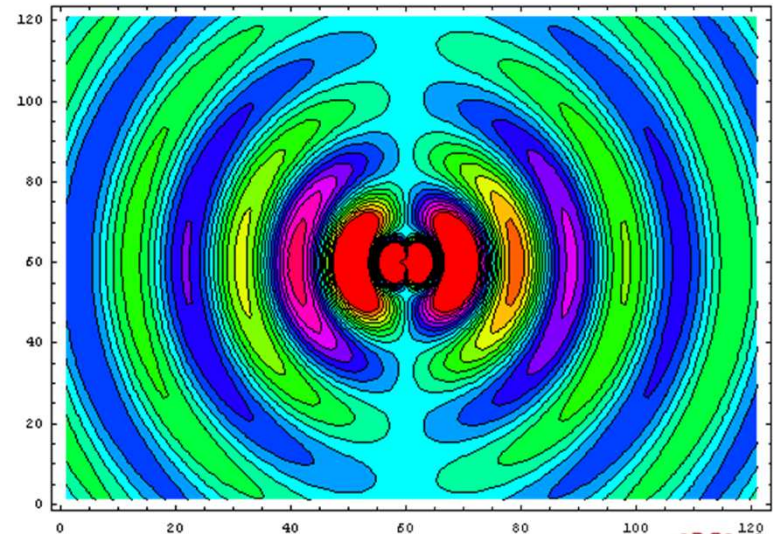
$$\bar{S} = \frac{1}{2} \Re [\bar{E} \times \bar{H}^*]$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

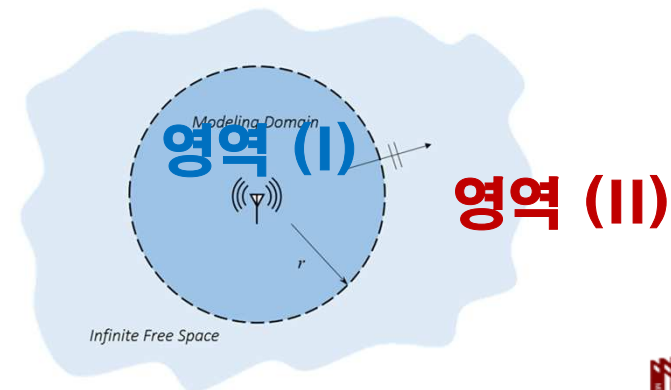
유일성 정리

- 편미분 방정식: 해의 존재성과 유일성 증명 필요
- 전자파에 대한 파동 방정식의 해는 **유일하다**.
 - 조건: **전기장** 혹은 **자기장**의 **경계 조건**이 고정되어야 함
 - 복사 조건의 중요성: 손실 조건이 꼭 필요
 - 도파 모드: 여러 해가 가능함



전자기장 경계 조건

- 유일성 정리에 의해 경계면에서 E 혹은 H를 하나의 조건으로 정의함 (경계 조건)
 - 전기장(E) 접선 성분 연속
 - 자기장(H) 접선 성분 연속
- 매질에 따라 경계 조건 적용 조건이 달라짐
 - PEC: E 접선 = 0
 - PMC: H 접선 = 0
 - 일반: E와 H 접선 동시 고려



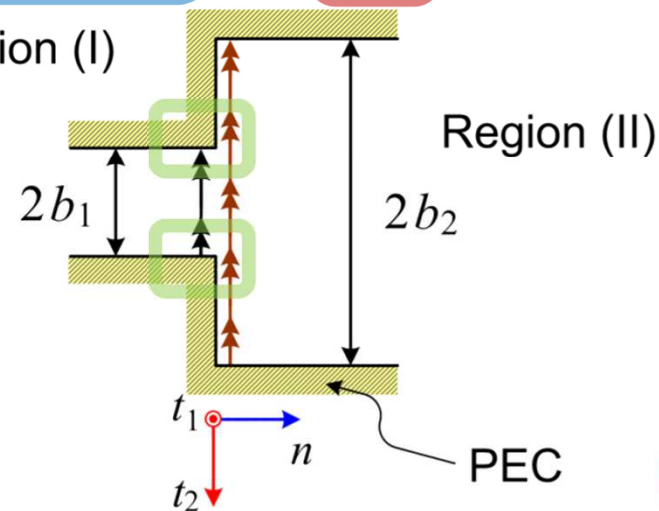
경계 조건에서 자하의 존재

- H에 대한 법선 경계 조건을 적용할 때 **등가 자하 밀도 ρ_m** 을 도입
 - 자하라는 번거로움으로 인해 주로 접선만 고려

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = \rho_m \Rightarrow \frac{\partial H_{t_1}}{\partial t_1} + \frac{\partial H_{t_2}}{\partial t_2} = \frac{\rho_m}{\mu} - \frac{\partial H_n}{\partial n}$$

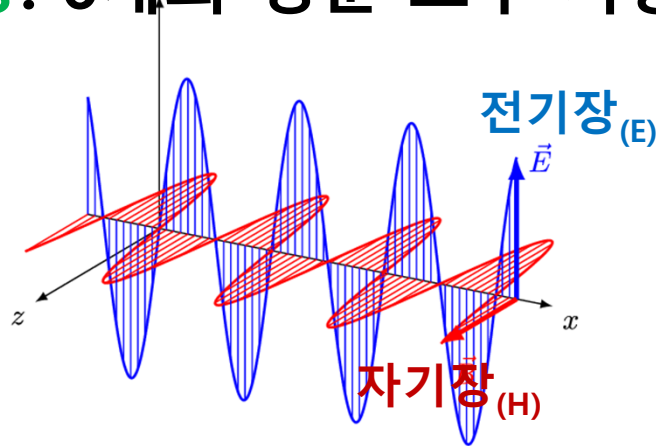
접선 경계 조건 Region (I)

☒ $\rho_{ms} = \mu \hat{H}_t \cdot \hat{n}$

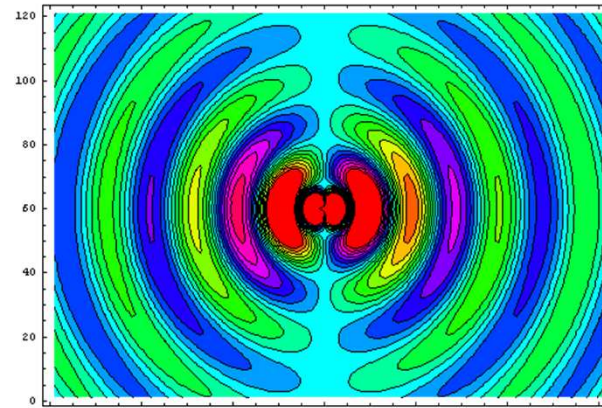


편파 (Polarization)

- 전자기파 (EM wave) = 전자파 = 전파
 - 전기장과 자기장으로 이루어진 파동
 - 반드시 전기장과 자기장이 함께 있어야 함
- 편파 특성
 - 원역장: 독립된 편파 성분은 2개; 항상 전기장으로 선택
 - 근역장: 6개의 성분 모두 사용 가능

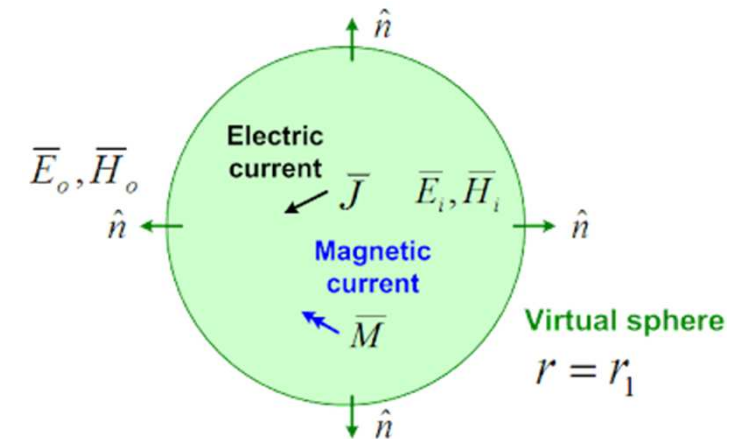


23



Poynting 정리

- Maxwell 방정식은 특이하게 **전력 보존 법칙**이 항상 성립
- 증명에는 Poynting 정리가 사용됨
 - 전자파의 전력 밀도: Poynting vector
- 회로 해석과 연동
 - 소형 안테나 (small antenna) 이론의 시작점
 - 저항과 reactance 성분의 분해



$$\begin{aligned}
 & - \oint_s (\bar{E} \times \bar{H}^*) \cdot d\bar{a} \\
 & = \int_v \left[\bar{E} \cdot \bar{J}^* + \bar{H}^* \cdot \bar{M} + i2\omega \left(\frac{\epsilon}{2} |\bar{E}|^2 - \frac{\mu}{2} |\bar{H}|^2 \right) \right] dv
 \end{aligned}$$

$$- \oint_s \frac{1}{2} \Re [\bar{E} \times \bar{H}^*] \cdot d\bar{a} = \int_v \frac{1}{2} \Re [\bar{E} \cdot \bar{J}^* + \bar{H}^* \cdot \bar{M}] dv$$

전자파의 평균 전력

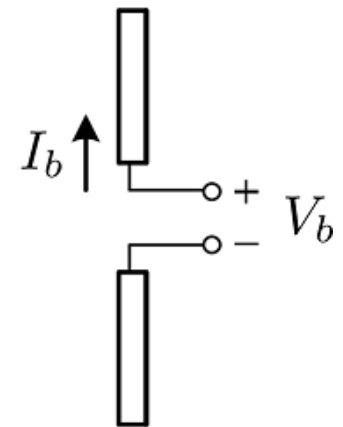
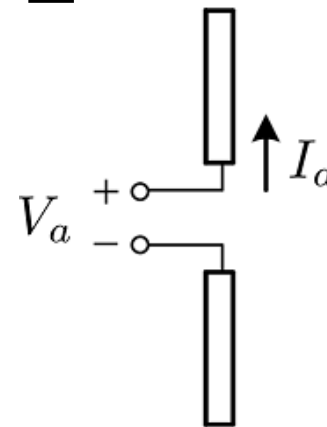
Lorentz 상반 정리 (Reciprocity Theorem)

- 독립적이며 전혀 상관없는 두 전자파가 가지는 관계
- **안테나 측정의 원리**
 - 송신 안테나와 수신 안테나 특성은 연결됨
 - 근역장: probe 보상에 사용됨
- **Friis 전력 전송 공식** 증명에도 사용됨
 - 안테나 이득과 유효 면적의 관계

$$\oint_s (\bar{E}_a \times \bar{H}_b - \bar{E}_b \times \bar{H}_a) \cdot d\bar{a} = \int_v (\bar{E}_b \cdot \bar{J}_a - \bar{H}_b \cdot \bar{M}_a) dv - \int_v (\bar{E}_a \cdot \bar{J}_b - \bar{H}_a \cdot \bar{M}_b) dv$$

$$\int_v (\bar{E}_a \cdot \bar{J}_b - \bar{H}_a \cdot \bar{M}_b) dv = \int_v (\bar{E}_b \cdot \bar{J}_a - \bar{H}_b \cdot \bar{M}_a) dv$$

원역장 조건



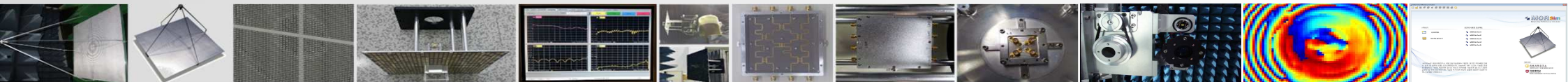
전자장 수치해석 기본개념

KIEES 한국전자파학회

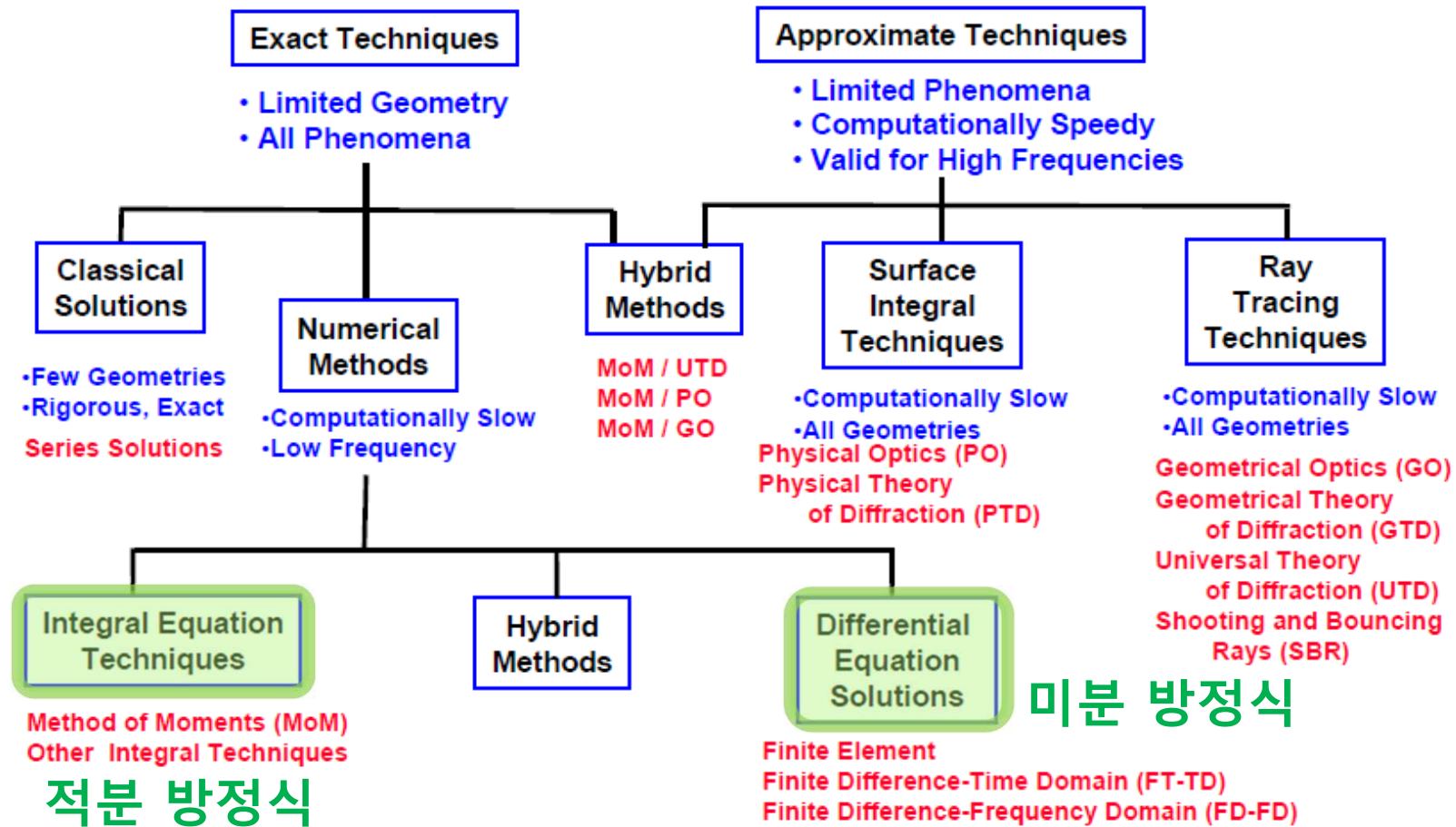
I. 전자장 이론

II. 미분 방정식

III. 적분 방정식



다양한 전자파 해석 기법



□ Courtesy to R.M. O'Donnell, *Radar Systems Engineering*, 2009.

Maxwell 방정식과 미분 방정식

- Maxwell 방정식으로 만든 potential 기반 파동 방정식은 **단 하나!**
- 하지만 **경계 조건**에 따라 파동 방정식이 바뀌어야 함
 - 적절한 좌표계 선택
 - 주로 직교 좌표계



원통은 원통 좌표계

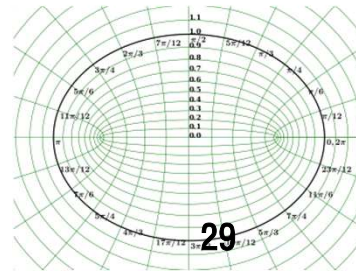
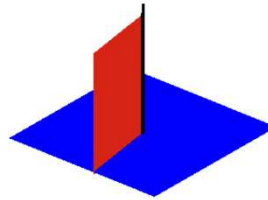
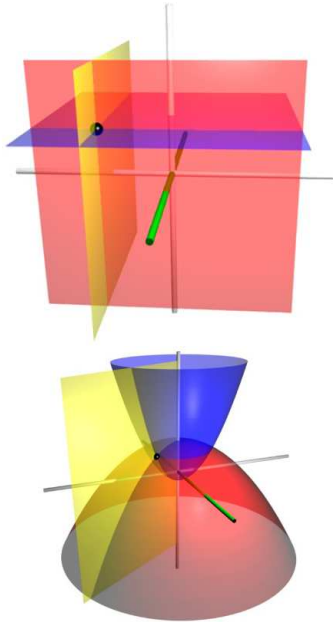
$$\left(\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{A} = -\mu \bar{J} \quad \rightarrow$$



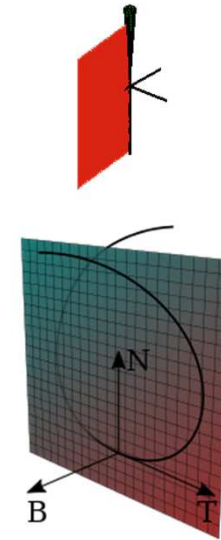
구는 구 좌표계

다양한 직교 좌표계

- 경계 조건에 따라 적절한 좌표계 선택
 - 우리가 푸는 문제에 따라 경계 조건은 항상 바뀜
 - 따라서 구조에 따라 좌표계가 정해짐
 - 좌표계가 정해지면 연결된 미분 방정식이 생김

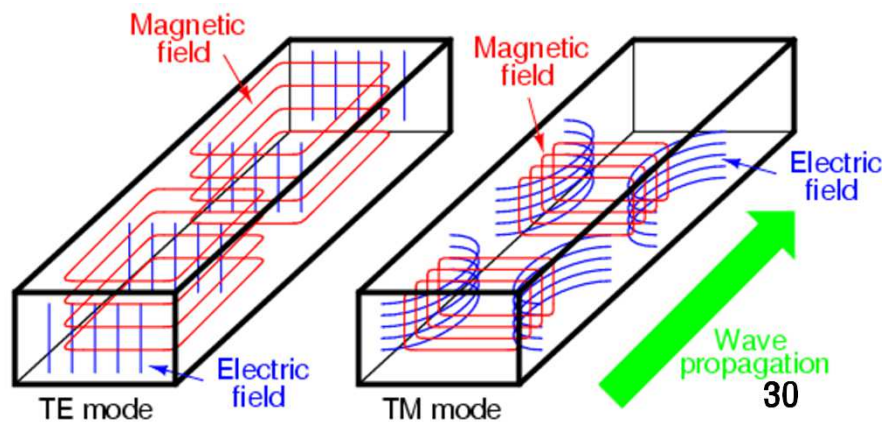


29



전자파 Mode

- 전자파 mode는 미분 방정식 해법의 핵심
- 전자파 mode의 특징
 - 설정한 좌표계에 대한 **Maxwell 방정식 만족**
 - 주어진 **매질 경계 조건 만족**
 - 주로 표준 구조를 가진 전송선이나 도파관 해석에 사용



mode는 정확히
편미분 방정식의 해

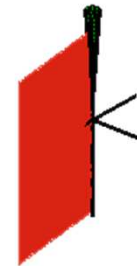
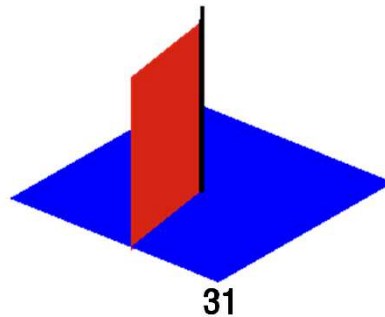
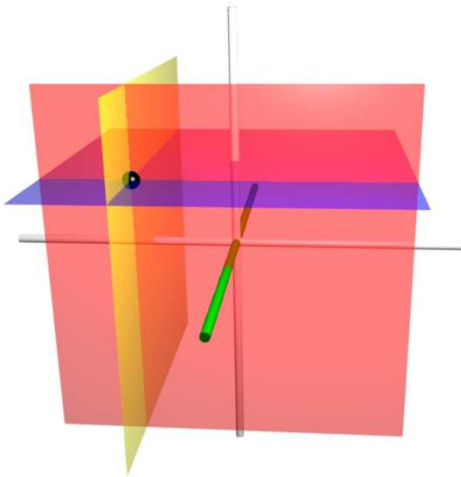
$$(\nabla^2 + k^2) \bar{E} = 0$$

$$(\nabla^2 + k^2) \bar{H} = 0$$

Mode 정합법

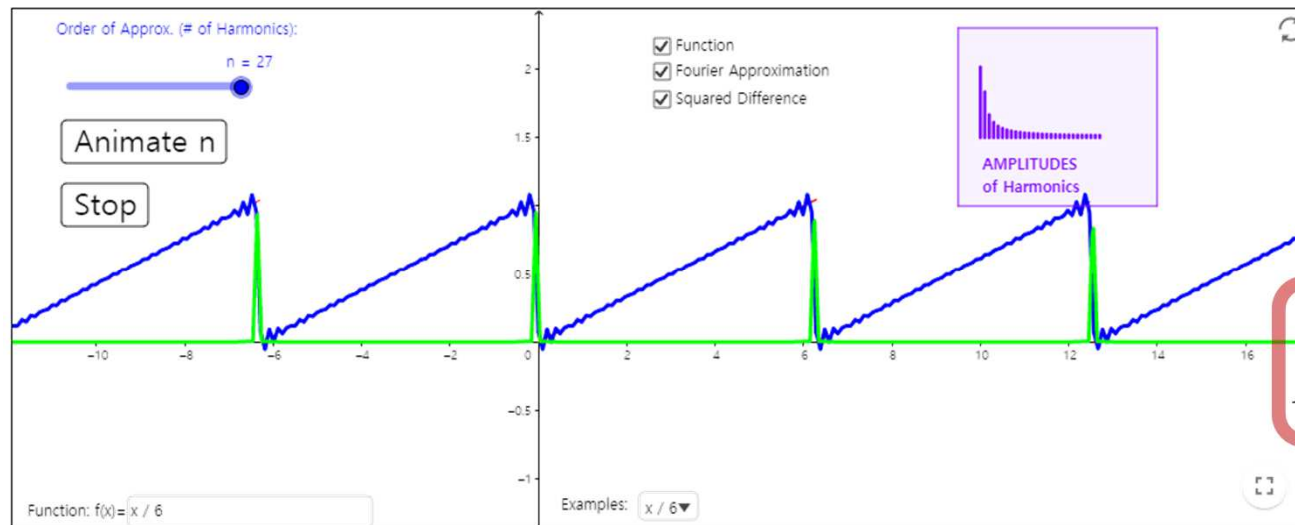
- Mode 정합법 (matching method)은 Fourier 급수 기법의 일반화
- 좌표계별 전자파 mode 함수
 - 데카르트 좌표계: 사인과 코사인 함수
 - 원통 좌표계: Bessel 함수, 복소 지수 함수
 - 구 좌표계: 구면 Bessel 함수, Legendre 함수, 복소 지수 함수

편미분 방정식이 달라 mode 함수도 달라짐



Mode 정합법은 정확

- Mode 정합법은 근사가 없는 **정확한 편미분 방정식 해법**
 - MoM_(Method of Moments)은 mode 정합법과 유사하나 근사 해법
 - Mode 정합법은 **완비성**이 성립: mode 함수 차수를 늘리면 오차가 계속 줄어듦



←geogebra.org

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^M A_m^I \bar{\phi}_m^I(\bar{\rho}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^M A_m^{II} \bar{\phi}_m^{II}(\bar{\rho})$$

전자장 수치해석 기본개념

KIEES 한국전자파학회

I. 전자장 이론

II. 미분 방정식

III. 적분 방정식



적분 방정식의 필요성

■ 미분 방정식

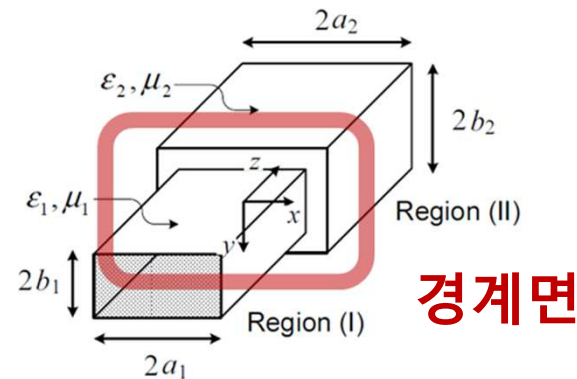
- Mode 정합법: 경계 조건을 mode 함수 이용해 정합시킴
- 차분법: 경계에서 반사/투과를 직접 적용해 경계 조건 만족시킴

■ 적분 방정식

- 등가 전류가 만드는 전자장으로 경계 조건 만족
 - 이로 인해 적분 방정식을 미분해서 적분을 없앨 수 없음: 적분 자체가 정적분임

$$\boxed{F(x)} = \int_{s'} \boxed{f(x')} k(x, x') dx'$$

경계 조건 해



적분 방정식의 해법 (I)

- 미분 방정식과 다르게 적분 방정식의 해법은 매우 어려움
 - 예전부터 **적분을 합**으로 바꾸어 행렬로 계산하는 방식이 대표적인 근사 기법
- 최초의 적분 방정식 해법: Abel(1823)
 - 특수한 경우에만 풀이 가능
- 적분 방정식의 새로운 관점
 - Fredholm 적분 방정식(1903)
 - 1차원에 대한 일반 해법 제시

☑ $\psi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y) dy$ 적분으로 적분 파해

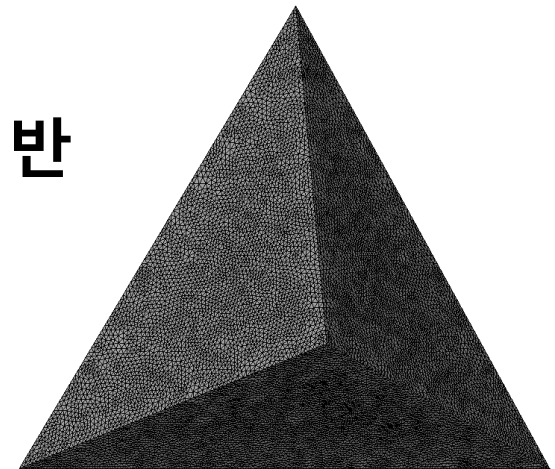
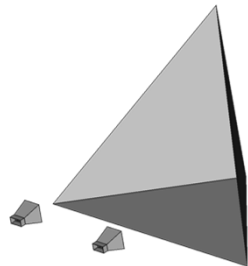
적분 방정식의 해법 (II)

- Hilbert 공간 제안(1904)
 - 내적 공간과 완비성
- Galerkin의 해법(1915): MoM의 시초
 - 컴퓨터가 없어서 대중화 실패
- Harrington의 재발견(1960)
 - 현재 우리가 쓰는 MoM_(Method of Moments)
 - 통계학의 moment 이름을 빌려서 MoM

$$\checkmark \quad \bar{E}_s(\bar{r}) = \oint_{s'} \left\{ -j\omega\mu \bar{J}_s(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}'; k) - \frac{\bar{\nabla}' \cdot \bar{J}_s(\bar{r}')}{j\omega\epsilon} \bar{\nabla}' g(\bar{r}, \bar{r}') \right\} ds'$$

Method of Moments: MoM

- 대표적인 적분 방정식 해법
 - 해석적인 해법이 없는 적분 방정식을 풀기 위한 **computer에 친화**적인 수치해석 방법
- 임의 구조체에 적용 가능한 **근사적인 mode 정합법** (matching method)
 - 기저 함수의 수렴성과 안정성 확인 필요
- 주로 **금속 산란체** 계산에 사용
 - 표면만 고려하므로 적분 방정식은 2D 기반



MoM 적용 절차

- 경계 조건을 표현하는 적분 방정식 유도
- 산란체 제외 영역의 Green 함수 유도
- 산란체를 위한 기저 함수 (J, mesh) 선택
- 적분 방정식 \rightarrow 행렬 방정식 (MoM)
- 수치해석으로 행렬 방정식 풀이

$$\underbrace{\mathcal{L} \left[\bar{J}(\bar{r}'), \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \right]}_{\bar{J}(\bar{r}') \approx \sum_{m=1}^M J_m \bar{B}_m(\bar{r}')} = \bar{E}_i(\bar{r}) \Rightarrow \mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{V}_i \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V}_i$$





Thank You !